4/11/2020

Φυλλάδιο 1

1. I υποδιάστημα του $\mathbb{R}$. Νδο $I \cong \mathbb{R}$.

Λύση: α) $I = (\alpha, \beta)$.

• Θεωρούμε $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta}$,

συνεχής και παραγωγίσιμη.

$f'(x) = -\frac{1}{(x-\alpha)^2} - \frac{1}{(x-\beta)^2} < 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$

$\Rightarrow f$ γν. φθίνουσα $\Rightarrow f$ 1-1.

• f συνεχής στο (α, β), $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f((\alpha, \beta)) = \mathbb{R} \Rightarrow$ f επί.

• άρα, $(\alpha, \beta) \cong \mathbb{R}$.

• (δδο $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \cong \mathbb{R}$)

β) $I = (\alpha, \infty)$. $f : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-\alpha} - x$

f 1-1 και επί. $\Rightarrow (\alpha, +\infty) \cong \mathbb{R}$

$$\gamma)\quad I=(-\infty,a)\overset{f(x)=-x}{\cong}(-a,+\infty)\cong\mathbb{R}$$

$$\delta)\quad I=[a,b).\quad (a,b)\overset{(a)}{\cong}\mathbb{R}\cong(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$\Longrightarrow \exists\ f:(a,b)\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 1-1 και επί

Θεωρούμε την $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\in(a,b) \\ 0 & , x=a. \end{cases}$$

Τότε g 1-1 κ' επί $\Longrightarrow [a,b)\cong\mathbb{R}$.

$$\varepsilon)\quad (a,b]\overset{f(x)=-x}{\cong}[-b,-a)\overset{(\delta)}{\cong}\mathbb{R}$$

στ) $I=[a,b]$.

Ξέρουμε από (δ) ότι $[a,b)\cong\mathbb{R}\cong(-\infty,0)\cup(0,\infty)\Longrightarrow\exists\ f:[a,b)\to(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 1-1 και επί.

Θεωρούμε την $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\in[a,b) \\ 0 & , x=b \end{cases}\quad , \text{1-1 και επί.}$$

ζ) $I=[a,\infty)$, $\exists\ f:(a,\infty)\to(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 1-1 κ' επί. Θεωρούμε την $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\in(a,\infty) \\ 0 & , x=a \end{cases}\quad , \text{1-1 κ' επί.}$$

$$\eta)\quad I=(-\infty,a]\overset{f(x)=-x}{\cong}[-a,\infty)\overset{(\zeta)}{\cong}\mathbb{R}.\ \boxtimes$$

2.(iii) $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ν.δ.ο.

$$\liminf \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \liminf |x_n|^{1/n} \leq \limsup |x_n|^{1/n} \leq \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

<u>Λύση</u>: $|x_n|^{1/n} = \left(\frac{|x_n|}{|x_{n-1}|} \cdot \frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|} \cdots \frac{|x_2|}{|x_1|} \cdot |x_1| \right)^{1/n}$

• Θέτω $y_n = \frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}$, $w_n = \inf\{y_n, y_{n+1}, \ldots\}$,

$\ell = \liminf y_n = \liminf \frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}$

· Γνωρίζουμε ότι $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

<u>Περίπτωση 1</u>: $\ell = 0$. $\Rightarrow$ Τέλος

<u>Περίπτωση 2</u>: ℓ 0

Έστω $\varepsilon > 0$ $\xRightarrow{w_n \to \ell}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$w_n > \ell - \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $y_n > \ell - \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Όμως, $|x_n|^{1/n} = (y_n, y_{n-1}, \ldots, y_2 |x_1|)^{1/n}$

$$= (\underset{\substack{\vee \\ \ell-\varepsilon}}{y_n}\ \underset{\substack{\vee \\ \ell-\varepsilon}}{y_{n-1}} \cdots \underset{\substack{\vee \\ \ell-\varepsilon}}{y_{n_0}}\ y_{n_0-1} \cdots y_2 |x_1|)^{1/n}$$

$$> \Big(\underbrace{(\ell-\varepsilon)\cdots(\ell-\varepsilon)}_{n-n_0} \cdot \underbrace{y_{n_0-1}\cdots y_2 |x_1|}_{= A > 0}\Big)^{1/n}$$

$$= (\ell-\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} \cdot A^{1/n}$$

$$\liminf |x_n|^{1/n} \geq \liminf\left((l-\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} \cdot A^{1/n}\right)$$
$$= (l-\varepsilon)\cdot 1 = l-\varepsilon$$

$\Longrightarrow \forall\ 0<\varepsilon<l$, ισχύει $\liminf |x_n|^{1/n} \geq l-\varepsilon$

$\Longrightarrow \liminf |x_n|^{1/n} \geq l = \liminf \dfrac{|x_n|}{|x_{n-1}|} =$

$\liminf \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$. $\boxtimes$

3. A μη κενό κ' φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Νδο $\exists\ \{x_n\}$ αύξουσα κ' $\{y_n\}$ φθίνουσα με $x_n, y_n \in A$ $\forall n\in\mathbb{N}$, τ.ω. $x_n \to \sup A$, $y_n \to \inf A$.

Λύση: Θέτουμε $M=\sup A \in \mathbb{R}$.

Περίπτωση 1: $M\in A$ $x_n = M, \forall n\in\mathbb{N}$.

Περίπτωση 2: $M\notin A$.

- $\exists\ x_1 \in A$, με $M-1<x_1<M$ (αλλιώς $M-1$ θα ήταν άνω φράγμα του A, άτοπο γιατί $M=\sup A$).

- $\exists\ x_2 \in A$ με $\underbrace{x_1 < x_2 < M \text{ κ' } x_2 > M-\frac{1}{2}}$

$$\max\{x_1, M-\tfrac{1}{2}\} < x_2 < M$$

(αλλιώς $\max\{x_1, M-\frac{1}{2}\}$ $(<M)$ θα ήταν
άνω φράγμα του A, άτοπο γιατί
$M=\sup A$).
• $\exists\, x_3 \in A$, με $x_2 < x_3 < M$ κ'
$x_3 > M - \frac{1}{3}$ (ομοίως).
⋮
• $\exists\, x_n \in A$, με $x_{n-1} < x_n < M$ κ'
$x_n > M - \frac{1}{n}$
⋮

Ορίσαμε την ακολουθία $\{x_n\}$ από το A
(Συμβ: $\{x_n\} \subseteq A$).
Η $\{x_n\}$ είναι (γν.) αύξουσα και
$M - \frac{1}{n} < x_n < M$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \to M$.

• Έστω $m = \inf A \in \mathbb{R}$. Τότε, $-m = \sup(-A)$
$\Rightarrow \exists\, \{x_n\} \subseteq -A$, τ.ω. $x_n \to \sup(-A) = -m$.
Όμως, η ακολουθία $y_n = -x_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία από το A και $y_n \to m$. ▨.

5. Έστω $\{a_n\}$ μη φραγμένη. Τότε, $\exists$ $\{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$, τ.ω. $a_{k_n} \to \pm\infty$.

<u>Λύση</u>: Έστω π.χ. ότι $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη.
• $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $a_{k_1} > 1$, (αλλιώς θα είχαμε $a_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ θα ήταν άνω φραγμένη.)

• $\exists\, k_2 > k_1$, τ.ω. $a_{k_2} > 2$ (αλλιώς θα είχαμε $a_n \leq 2$, $\forall n > k_1 \Rightarrow a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_1}, 2\}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ θα ήταν άνω φραγμένη.)

• $\exists\, k_3 > k_2$, τ.ω. $a_{k_3} > 3$ (ομοίως)

⋮

• $\exists\, k_n > k_{n-1}$, τ.ω. $a_{k_n} > n$

⋮

$\Rightarrow$ έχουμε βρει μία υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$, τ.ω. $a_{k_n} > n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{k_n} \to \infty$. ☒

4. Έστω $\{a_n\}$, τ.ω. $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$. Νδο το σύνολο τιμών $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

<u>Λύση</u>: Ονομάζουμε $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$. Έστω $\varepsilon = a_{n_0}$. Επειδή $a_n \to 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_1$, $a_n < \varepsilon = a_{n_0}$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\boxed{n_1 > n_0}$, γιατί αν $n_1 \leq n_0$, θα είχαμε $a_{n_0} < a_{n_0}$, άτοπο.

• $\forall\, n < n_1$, $a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\}$.

• $\forall n \geq n_1$, $a_n \leq a_{n_0}$

• Επειδή $n_0 < n_1$: $a_{n_0} \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\}$

• $\exists\, k \in \{1, \dots, n-1\}$, τ.ω. $a_k = \max\{a_1, \dots, a_{n_1-1}\}$

$\Rightarrow \forall\, n < n_1$, $a_n \leq a_k$ και $\forall n \geq n_1$
$a_n < a_{n_0}$
$\leq a_k$

$\Rightarrow a_n \leq a_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ☒

<u>Άσκηση 1</u> Ν.δ.ο. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\cong\mathbb{R}$.

Θεωρούμε $f:\mathbb{R}\to(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

με τύπο $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0,1,2,\ldots \\ x+1, & x\in\{0,1,2,\ldots\} \end{cases}$.

• f 1-1: Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Αν $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ αν $x\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $x_1+1=x_2+1$, αν $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}\Rightarrow$ f 1-1.

• f επί: Έστω $y\neq 0$. Αν $y\notin\mathbb{Z}$, τότε $y=f(y)\Rightarrow y\in f(\mathbb{R})$.

Αν $y\in\mathbb{Z}$, $y<0$, τότε $f(y)=y\Rightarrow$ $y\in f(\mathbb{R})$. Αν $y\in\mathbb{Z}$, $y>0$, τότε $y=f(y-1)$ $\Rightarrow y\in f(\mathbb{R})$. Τέλος, $f(y)\neq 0$, $\forall y\in\mathbb{R}$. ∎

6. $G\subseteq\mathbb{R}$, $G\neq\emptyset$, τ.ω. $\forall x,y\in G$, ισχύει $-x\in G$ και $x-y\in G$. (δηλ. G προσθετική υποομάδα του $\mathbb{R}$.) Ν.δ.ο. είτε $\exists a\in G$, τ.ω. $G=\{na : n\in\mathbb{Z}\}$ είτε G πυκνό στο $\mathbb{R}$ (δηλ. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists y\in G$, με $|x-y|<\varepsilon$).

<u>Λύση</u> Θέτουμε $a=\inf[G\cap(0,\infty)]$.

<u>Περίπτωση 1:</u> $a>0$.

• Ν.δ.ο. $a\in G$. Έστω ότι $a\notin G$.

Έστω $0<\varepsilon<a$. Τότε, $\exists x\in G$, τ.ω. $a<x<a+\varepsilon$.

Ομοίως, $\exists y\in G$, τ.ω. $a<y<x$, αλλιώς, το x θα ήταν κάτω φράγμα του $G\cap(0,\infty)$ αλλά $x>a=\inf(G\cap(0,\infty))$, άτοπο).

$\Rightarrow 0<x-y<a+\varepsilon-a=\varepsilon<a$

δηλ. $x-y \in G\cap(0,a)$ και $x-y>0$ και $x-y<a=$ $\inf(G\cap(0,\infty))$, άτοπο.

Άρα, $a\in G$.

- $\begin{cases} a\in G \Rightarrow a+a\in G, (a+a)+a, \dots, na\in G, \forall n\in\mathbb{N} \\ -a\in G \Rightarrow (\text{ομοίως})\ -na\in G, \forall n\in\mathbb{N} \\ a+(-a)\in G \Rightarrow 0\in G \end{cases}$

$\Rightarrow na\in G, \forall n\in\mathbb{Z}$

- Αρκεί νδο $\forall x\in G, \exists n\in\mathbb{Z}$, τ.ω. $x=na$.

Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε, $\exists x_0\in G$, τ.ω. $x_0\neq na, \forall n\in\mathbb{Z}$.

- Θέτουμε: $n_0=\left[\frac{x_0}{a}\right]$. Τότε

$\frac{x_0}{a}-1<\left[\frac{x_0}{a}\right]\leq\frac{x_0}{a}$. Όμως, $\frac{x_0}{a}\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{x_0}{a}-1<n_0<\frac{x_0}{a}$

$\Rightarrow \underbrace{x_0-a}_{\in G}<\underbrace{n_0a}_{\in G}<\underbrace{x_0}_{\in G}$

και

$0<\underbrace{x_0-n_0a}_{\in G\cap(0,\infty)}<x_0-(x_0-a)=a=\inf(G\cap(0,\infty))$ άτοπο

Άρα, $G\subseteq\{na: n\in\mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow G=\{na: n\in\mathbb{Z}\}$

<u>Περίπτωση 2</u>: $a=0$. Αρκεί νδο $G\cap(0,\infty)$ πυκνό στο $(0,\infty)$.

Έστω $x\in(0,\infty)$. Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί νδο $\exists z\in G\cap(0,\infty)$, τ.ω. $|z-x|<\varepsilon$.

$\exists y\in G\cap(0,\infty)$, τ.ω. $y<\varepsilon$.

• Θέτουμε $n_0 := \max\{n \in \mathbb{N} : n \cdot y \leq x\}$.
Τότε $(n_0+1)y > x$ και $(n_0+1)y - x = n_0 y + y - x = (n_0 y - x) + y \leq y$

• Παίρνω $z = (n_0+1)y \Rightarrow |z - x| = z - x < \varepsilon$. $\blacksquare$

7. Να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία της ακολουθίας $\{\cos n\}$.
Λύση : $G := \{n + 2\pi m : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Το G έχει τις ιδιότητες της Ασκ. 6.
Θέτουμε $a := \inf(G \cap (0,\infty))$.
Ισχύει $a > 0$ ή $a = 0$;
• Αν $a > 0$, τότε $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$
Όμως, $2\pi \in G \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $2\pi = n_0 \cdot a$.
$\Rightarrow a = \dfrac{2\pi}{n_0}$.

Επίσης, $1 + 2\pi \in G \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}$, τ.ω.
$1 + 2\pi = \nu a = \dfrac{\nu 2\pi}{n_0} \Rightarrow 1 = 2\pi\left(\dfrac{1}{n_0} - 1\right)$

$\Rightarrow 2\pi = \dfrac{1}{\frac{1}{n_0} - 1} \in \mathbb{Q}$, άτοπο.

Άρα, $a = 0 \xrightarrow{\text{Ασκ.6}} G$ πυκνό στο $\mathbb{R}$.
Έστω, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq G$, τ.ω. $x_n \to x$
$\Rightarrow \exists \{k_n\}, \{m_n\} \subseteq \mathbb{Z}$, τ.ω.
$k_n + m_n \cdot 2\pi \to x$
$\Rightarrow \underset{\cos(k_n)}{\underset{\|}{\cos}}(k_n + 2\pi \cdot m_n) \to \cos x$.

$\Rightarrow \cos x$ οριακό σημείο της $\{\cos n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
(η $\{k_n\}$ μπορεί να ληφθεί γν. αύξουσα. Γιατί???)

$\Rightarrow$ Σύνολο των οριακών σημείων της $\{\cos n\} = [-1,1]$. ▨